13/4/20

Μονώνυμο στις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$M = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$, $m_i \geq 0$, $m_i \in \mathbb{Z}$

Π.χ. x^{10}, $x_1 x_2 x_4$, $x_1^3 x_2^4 x_5^7$

Βαθμός μονωνύμου M:

$\deg(M) = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$

Π.χ. $\deg(x_1^3 x_2^4 x_4^3) = 10$

• Όρος: είναι ένα μονώνυμο πολλ/μένο με κάποιον μη μηδενικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται συντελεστής

Π.χ. $\underbrace{7}_{\text{όρος}} x_1^3 x_2^4 x_5^3$

• Πολυώνυμο: άθροισμα από πεπερασμένο πλήθος όρων

$f = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \ldots + \lambda_s M_s \in K[x_1, \ldots, x_n]$

μονώνυμα ↑ ... ↑ αριθμοί

• Ένα μη μηδενικό πολυώνυμο ονομάζεται ομογενές αν κάθε μονώνυμό (όρος) του έχει τον ίδιο βαθμό

Π.χ. $\mathbb{R}[x,y,z]$: $f = x^3 - 3x^2y + 7z^3$ ομογενές

$g = x^2 - 2xy + z^2 + 2y + 7$ μη ομογενές

$h = x^4 y$ ομογενές

$l = 4$ ομογενές

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω f πολυώνυμο. Το $M(f)$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο που αποτελείται από τους μεγιστοβάθμιους όρους του f.
Το $E(f)$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο που αποτελείται από τους ελαχιστοβάθμιους όρους του f

→ Στο ∞ δύο ευθείες: $x=y$ κ' $x=-y$

Π.χ. • $f = \underbrace{x^2-y^2}_{M(f)} + 2x - 3y + \underbrace{1}_{E(f)}$

• $g = \underbrace{x^3-2xy^2}_{M(f)} + x^2 + \underbrace{x-2y}_{E(f)}$

• $h = \underbrace{x^4-2x^3y+y^4}_{M(h)=E(f)}$ Θα δούμε ότι έχει 4 εφαπτομ.

Αν f ομογενές τότε $M(f) = f = E(f)$

$f = M(f) + \dots + E(f)$

Το $M(f)$ μας δείχνει τη συμπεριφορά της καμπ. στο ∞ κ' το $E(f)$ στο $(0,0)$

$f \in \mathbb{R}[x,y,z]$
f ομογενές → αντιστ. σε μία επιφ. στον 3διάστατο χώρο

Π.χ. $x^2y - \sqrt{2}xyz + z^3$

Αν $(x_0,y_0,z_0) \in V(f)$ τότε κ' το $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) \in V(f)$

άρα: $(x_0,y_0,z_0) \in V(f) \Rightarrow x_0^2y_0 - \sqrt{2}x_0y_0z_0 + z_0^3 = 0$

Θ.υ.α.ο. $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) \in V(f)$

Αντικαθιστώ: $\lambda^2x_0^2\lambda y_0 - \sqrt{2}\lambda x_0 \lambda y_0 \lambda z_0 + \lambda^3 z_0^3 =$
$= \lambda^3 x_0^2 y_0 - \lambda^3\sqrt{2}x_0y_0z_0 + \lambda^3 z_0^3$
$= \lambda^3(x_0^2y_0 - \sqrt{2}x_0y_0z_0 + z_0^3) = \lambda^3 \cdot 0 = 0$

άρα $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) \in V(f)$

$f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ $\qquad f = x^2 + y^2 - 3x + y - 1$

$\mathbb{C}[x,y]$

• Ομογενοποίηση του πολ/μου f ονομάζεται η διαδικασία που πηγαίνω από το πολ/μο $f(x,y)$ στο πολ/μο
$$F(x,y,z) = z^d f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \quad d = \deg f$$

$$\hookrightarrow F = z^2 \cdot f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = z^2\left[\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 - 3\frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right]$$

$$= x^2 + y^2 - 3xz + yz - z^2$$

Η αντίστροφη διαδικασία ονομάζεται αποομογενοποίηση.

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ $f = x^2 + y^2 - 1 \xrightarrow{\text{ομογεν.}} F = z^2 f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = x^2 + y^2 - z^2$

$F \xrightarrow[z=1]{\text{αποομογεν.}} f$

$g = x^3 - 3xy^2 + x^2 - 2y^2 + 3x - 7$

$\hookrightarrow G = x^3 - 3xy^2 + x^2 z - 2y^2 z + 3xz^2 - 7z^3$

$G \xrightarrow{z=1} g$

$f = x^3 y - 3x^2y^2 + 7xy^3 - 4y^4$

$\xrightarrow{\text{ομογ.}} F = x^3 y - 3x^2 y^2 + 7xy^3 - 4y^4$

$g = x + y - 3 \xrightarrow{\text{ομογεν.}} G = x + y - 3z$ επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

$G \xrightarrow{z=1} g$

Τι σημαίνει γεωμετρικά?

$f = x^2 + y^2 - 1$ κύκλος $(z=1)$

$F = x^2 + y^2 - z^2$ κώνος ευθειογενής επιφ. που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Εδώ "κρύβεται" η προβολική γεωμετρία...

Προβολικό επίπεδο

P_K^2 όπου K σώμα $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots)$

$P_K^2 = K^3 \setminus \{(0,0,0)\} / \sim$ (κλάσεις)

σχέση ισοδυναμίας

Ξέρω που έχω αφαιρέσει το $(0,0,0)$

Συμβολ.: $[(\alpha,\beta,\gamma)]_\sim = (\alpha,\beta,\gamma)$

$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ $\quad (x_i, y_i, z_i) \in K^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

αν $\exists\ \lambda \neq 0$, $\lambda \in K$, $x_2 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda y_1$, $z_2 = \lambda z_1$

Σχέση ισοδυναμίας (ανακλ., συμμετρ.

$$(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = [(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)]_\sim = [(\alpha,\beta,\gamma)]_\sim = (\alpha,\beta,\gamma), \ \lambda \neq 0$$

Έχω άπειρους τρόπους να συμβολίσω ένα ~~στοιχείο~~ σημείο

$\xrightarrow{\text{π.χ.}}$ $(2,3,7) = (-2,-3,-7)$
$= (2i, 3i, 7i)$ $[P_{\mathbb{C}}^2]$
$= (22, 33, 77)$
$= \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, 1\right)$

$z = 0 \rightarrow$ Έχω σημεία στο ∞

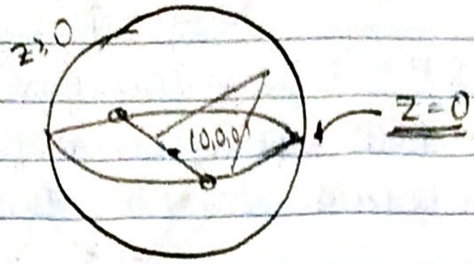
Μοντέλο της σφαίρας

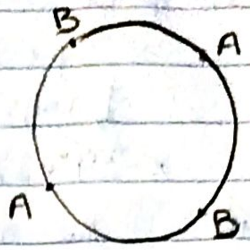
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

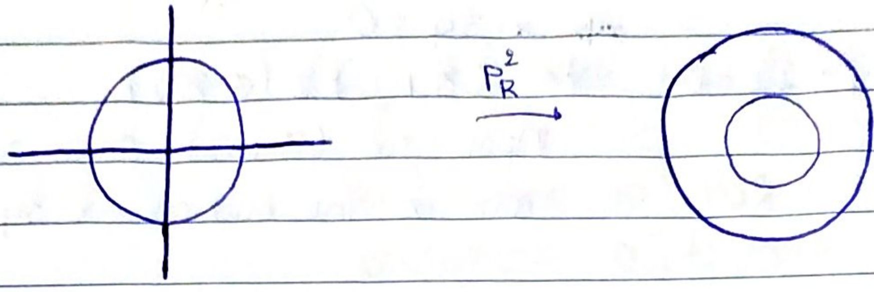
Τα προβολικά σημεία είναι ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων της σφαίρας με ακτίνα 1

Τα 2 σημεία είναι 1

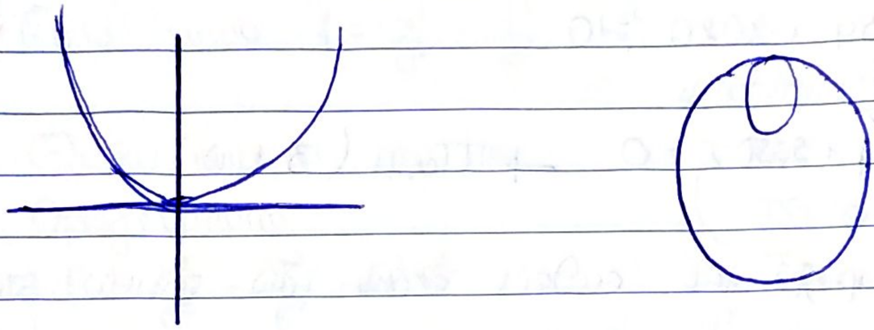
Μοντέλο του δίσκου

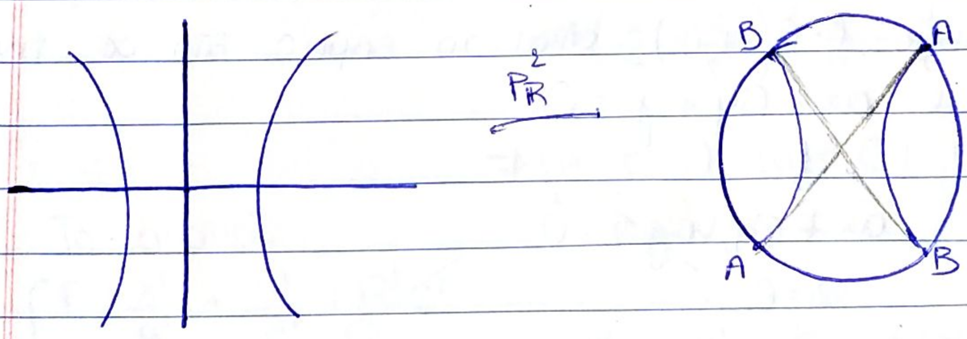






Ο κύκλος θα πάει σε κύκλο





φαίνονται 4 σημεία, αλλά είναι 2 γιατί είναι αντιδιαμετρικά

(, , 0)

↑ σημεία στο ∞

Αλγεβρικά...

Ευθεία $x-3y+2=0$

$\downarrow$ ομογενοποιώ

$x-3y+2z=0$ → είναι σημείο στο ∞

Όταν θέλω να βρω σημεία στο ∞ βάζω $z=0$ κ λύνω σύστημα:

$$\begin{cases} z=0 \\ x-3y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow x-3y=0$$

$(3,1,0) \equiv (6,2,0)$

Άρα το $(3,1,0)$ είναι το σημείο στο ∞ της ευθείας $x-3y+2=0$

Παίρνω τώρα μια $\parallel$ ευθεία με αυτήν:

$x-3y+2020=0$

$\downarrow$ ομογενοποιώ

$$\begin{cases} x-3y+2020z=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \text{Πάλι } (3,1,0)$$

Άρα παράλληλες ευθείες έχουν ίδιο σημείο στο ∞

Το σημείο $(-\beta,\alpha,0)$ είναι το σημείο στο ∞ της ευθείας $\alpha x+\beta y+\gamma=0$

$\downarrow$

$\alpha x+\beta y+\cancel{\gamma z}=0$

$z=0$

• Ποια είναι τα σημεία στο ∞ της καμπύλης $V(f)$? για $f = y - x^2$

↳ Ομογενοποιώ: $F = yz - x^2$

Ψάχνω σημεία στο άπειρο

$$\begin{cases} F = yz - x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

άρα $(0, 1, 0)$ σημείο στο ∞

θα μπορούσα να βάλω οτιδήποτε άλλο, π.χ. 2020

• Έστω τώρα $f = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - R^2$

Με βάση το προηγ. σχήμα περιμένω 2 σημεία

Θέλω σημεία στο ∞

Ομογενοποιώ:

$$\begin{cases} F = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - R^2 z^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a, -b, 0), (a, b, 0)}_{\text{σίγουρα } \neq} \text{ σημεία στο } \infty$$

Το αντίστοιχο:

$$\begin{cases} F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \cancel{R^2 z^2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow x = 0 = y, \; z = 0$$

$\Rightarrow (0,0,0)$ δεν είναι όμως αποδεκτό στο $P^2_{\mathbb{R}}$

Αν είμαι όμως στο $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right)\left(x + i\frac{y}{b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (ai, b, 0), (-ai, b, 0)$$

• $f = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2$ (κυκλος)

Θελω να βρω τα σημεια του στο ∞:

~~Ομογενοποιω~~

$f = x^2 + a^2 - 2ax + y^2 + b^2 - 2by - R^2$

$\downarrow$ Ομογεν.

$$\begin{cases} F = x^2 + a^2z^2 - 2axz + y^2 + b^2z^2 - 2byz - R^2z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 0$ [Στους πραγματ. $\nexists$]

$\Rightarrow (x - iy)(x + iy) = 0$

$\Rightarrow (i,1,0), (-i,1,0)$ ΚΥΚΛΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Δεν εξαρτώνται ούτε από το κέντρο ούτε από την ακτίνα.
Άρα όλοι οι κύκλοι διέρχονται από αυτά τα σημεία

Η προβολική γεωμετρία είναι πιο απλή από αυτήν που ξέρουμε!

$\downarrow$

• Βρείτε την εξίσωση της ευθείας του προβολικού επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία (a_1, a_2, a_3) κ. (b_1, b_2, b_3)

ΛΥΣΗ:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+ z \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{γιατί:}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{κ.} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$